Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Session : Automne 2016
Master : Tronc Commun
Département de Physique

Module : Mathématiques pour la Physique
Examen Final – Durée (1h30)

N.B.

- *Indiquer sur la feuille d'examen votre master.*

Exercice 1 (8 pts):
Dans l'espace euclidien réel à 3 dimensions E_3, on considère un plan engendré par les vecteurs suivants :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les vecteurs $|1\rangle$ et $|2\rangle$ forment une base du plan.
2) Appliquer la méthode de Schmidt pour transformer cette base en une base orthonormée.
3) Compléter cette base pour obtenir une base orthonormée de E_3.
4) Calculer la distance entre les deux vecteurs $|1\rangle$ et $|2\rangle$.

Exercice 2 (6 pts):

1) Montrer que le produit de deux opérateurs hermitien est hermitien si et seulement si les deux opérateurs commutent
2) Montrer que le polynôme réel $p(A)$ d'un opérateur hermitien A est hermitien.
3) Montrer que le produit $P = P_1 P_2$ de deux projecteurs P_1 et P_2 est un projecteur si et seulement si P_1 et P_2 commutent

Exercice 3 (6 pts):

1) Dans S_N, espace vectoriel réel de dimension N, on considère b^j les composantes contrvariantes d'un vecteur et T_i^j les composantes d'un tenseur mixte de rang 2 tel que :
$$b^j = T_i^j a^i.$$
Montrer que a^i $i = 1,2,\dots,N$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur.
2) Dans l'espace Euclidien E_3, utiliser le calcul tensoriel et la définition du produit vectoriel à l'aide du tenseur de Levi-Civita pour montrer les deux identités suivantes :
$$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f \times \vec{A} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$$
quelque soit la fonction scalaire f et les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.